3. PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La palabra probabilidad se utiliza para cuantificar nuestra creencia de que ocurra un acontecimiento determinado. La probabilidad se encarga de evaluar todas aquellas actividades en donde se tiene incertidumbre acerca de los resultados que se pueden esperar, esto quiere decir que la probabilidad está presente en casi en todas las actividades que se pretenda realizar, ejemplos:

-Cualquier proyecto de Ingeniería o de otras áreas

-Competencias deportivas

-Juegos de azar, etc., etc.

Definición:

La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales de A. Por lo tanto,

$$0 \leq P(A) \leq \mathbf{1}; \qquad P(\varnothing) = 0 \ \ \mathbf{y} \ \ P(S) = 1$$

La probabilidad de un evento varía entre 0 y 1; a cada uno de los elementos del espacio muestral se le asigna una probabilidad de manera que la suma de todas las probabilidades sea 1.

Ejemplos:

1. Una Moneda se lanza dos veces al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga cuando menos una cara?

Solución: el espacio muestral para este experimento es:

$S = \{CC, CS, SC, SS\}$

Si la moneda esta equilibrada, cada uno de estos resultados tendría la misma probabilidad de ocurrir. Por ello se le asigna una probabilidad de *w* a cada uno de los puntos muestrales. Entonces $4w = 1$ ó $w = \frac{1}{4}$. Si *A* represente el evento de que ocurra cuando menos una cara entonces:

$A = \{CC, CS, SC\}$

$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

2. Un dado esta cargado de manera que es doblemente probable que ocurra un número par que un número impar. Si *E* es el evento de que ocurra un número inferior a 4 en un solo lanzamiento del dado, encuentre *P(E).*

Solución: El espacio muestral es: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se asigna una probabilidad de w a cada numero impar y una probabilidad de 2w a cada numero par. Dado que la suma de las probabilidades debe ser 1, se tiene *9w=1 ó w* = $\frac{1}{9}$. De aquí que las probabilidades de $\frac{1}{9}$ *y* $\frac{2}{9}$ se le asignan a cada número impar y par, respectivamente. Por lo tanto,

$E = \{1, 2, 3\}$

$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

Teorema: *Si un experimento puede tener cualquiera de N resultados diferentes igualmente probables y si exactamente n de estos resultados corresponde al evento A, entonces la probabilidad del evento A es:*

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Ejemplo:

1. Si una urna contiene 10 esferas blancas, 15 azules y 5 rojas, la probabilidad de extraer al azar una esfera blanca, es:

Solución: P(E)= $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

Esta probabilidad se basa en razonamientos abstractos y no depende de la experiencia, lo cual permite estimar probabilidades sin realizar una gran cantidad de experimentos.

Reglas aditivas:

Frecuentemente es más fácil calcular la probabilidad de algún evento a partir de las probabilidades de otros. Esto puede ser cierto si el evento en cuestión puede representarse como la unión de otros dos eventos ó como el complemento de alguno. Enseguida se presentan varias leyes importantes que a menudo simplifican el cálculo de las probabilidades. La primera, llamada la **regla de adición**, se aplica a las uniones de los eventos.

Teorema: Si A y B son dos eventos cualquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demostración:

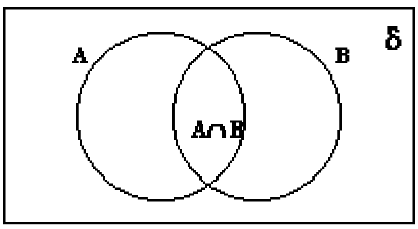

Figura 1.

Considérese el diagrama de Venn de la figura anterior. La $P(A \cup B)$ es la suma de las probabilidades de los puntos muestrales en $A \cup B$. $P(A)+P(B)$ es la suma de todas las probabilidades en A más la suma de todas las probabilidades en B. Por lo tanto, se han sumado dos veces las probabilidades en $P(A \cap B)$, se debe restar esta probabilidad una vez, para obtener la suma de las probabilidades en $A \cup B$, es decir $P(A \cup B)$.

Si A y B son mutuamente excluyentes (no hay intersección), entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ya que si A y B son mutuamente excluyentes, $A \cap B = \varnothing$ ***entonces,*** $P(A \cap B)$ ***= 0***

Si A1, A2 , A3, … An son mutuamente excluyentes, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Ejemplos:

1. La probabilidad de que Paula apruebe matemáticas es de 2/3 y la probabilidad de que apruebe ingles es de 4/9. Si la probabilidad de aprobar ambos cursos es de 1/4 ¿Cuál es la probabilidad de que Paula apruebe al menos uno de ellos?

Solución: Si M es el evento de aprobar matemáticas y E el evento de aprobar Ingles, entonces por la regla aditiva se tiene:

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) \;=\; \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{31}{36}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 cuando se lanza un par de dados?

Solución: Sea A el evento de que ocurra un 7, y B el evento de que ocurra un 11. El 7 resulta en 6 de los 36 puntos muestrales y el 11, en solo 2 de ellos. Dado que todos los puntos muestrales son igualmente posibles, se tiene que: P(A) = $\frac{6}{36}$ y P(B) = $\frac{2}{36}$ Los eventos son mutuamente excluyentes, dado que 7 y 11 no pueden presentarse en el mismo lanzamiento. Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \;=\; \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

3. Si las probabilidades de que una persona que adquiere un automóvil nuevo elija el color verde, blanco, rojo ó azul, son respectivamente de: 0.09, 0.15, 0.21, y 0.23 ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador adquiera un automóvil nuevo en alguno de estos colores?

Solución: Sean G, W, R y B los eventos de que un comprador elija respectivamente un automóvil verde, blanco, rojo ó azul. Dado que estos eventos son mutuamente excluyentes la probabilidad es:

$$P(G \cup W \cup R \cup B) = P(G) + P(W) + P(R) + (B) \;=\; 0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23 = 0.68$$

Con frecuencia es más fácil calcular la probabilidad de que ocurra un evento que calcular la probabilidad de que el evento no ocurra. Si este fuera el caso para algún evento A, se podría simplemente encontrar P(A´) en primer lugar y después encontrar P(A) mediante diferencia.

Si A es un evento cualquiera de un experimento aleatorio y A' ***es el complemento de A, entonces:***

$P(A) + P(A') = 1$ ó $P(A') = 1 - P(A)$

Ejemplo: Si las probabilidades de que un mecánico automotriz atienda a 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó más automóviles en un dia de trabajo, son respectivamente de: 0.12, 0.19, 0.28, 0.24, 0.10 y 0.07 ¿Cuál es la probabilidad de que atienda cuando menos 5 automóviles en el siguiente día de trabajo?

Solución: Sea E el evento de que el mecánico atienda cuando menos 5 automóviles, entonces, la $P(E) = 1 - P(E')$, donde E' es el evento de que se reparen menos de 5 autos.

Dado que $P(E') = 0.12 + 0.19 = 0.31$