4. PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que ocurra un evento B cuando se sabe que ha ocurrido algún otro evento A se denomina "Probabilidad Condicional", Se denota como P(B/A) y se lee como la probabilidad de que ocurra B dado que ocurra A ó la probabilidad de B dado A.

La Probabilidad Condicional de B dado A P(B/A)

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ si } P(A) > 0$$

Ejemplo: Se tiene la siguiente información:

Genero	**Cabello Liso**	**Cabello Rizado**	**Total**
Hombre	25	6	31
Mujer	15	4	19
Total	**40**	**10**	**50**

Cuál es la probabilidad de escoger una mujer dado que tiene el cabello rizado?

Definiendo los siguientes eventos: M : la elegida es mujer

R : la elegida tiene el cabello rizado

Forma 1	**Forma 2**
$P(M/R) = \frac{4}{10}$	Usando la expresión que define la probabilidad condicional: $P(M/R) = \frac{P(R \cap M)}{P(R)}$ Si $(R \cap M) = 4$ entonces $P(R \cap M) = \frac{4}{50}$ además $P(R) = \frac{10}{50}$ entonces: $P(M/R) = \frac{4/50}{10/50} = \frac{4}{10}$

La probabilidad condicional se simboliza P(B/A), que se lee probabilidad de B, dado A, o la probabilidad de que ocurra B, condicionado a que haya ocurrido A.

Reglas Multiplicativas:

Eventos Dependientes:

Dos o más eventos serán dependientes cuando la ocurrencia o no-ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro (o otros).

Al despejar $P(A \cap B)$ de la formula

$$P\left(B/A\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se obtiene la fórmula que permite calcular la probabilidad de que ocurran dos eventos.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A) \text{ ó } P(B \cap A) = P(A) * P(B/A)$$

La probabilidad de que ocurran tanto A como B es igual a la probabilidad de que ocurra A multiplicada por la probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A.

Ejemplo:

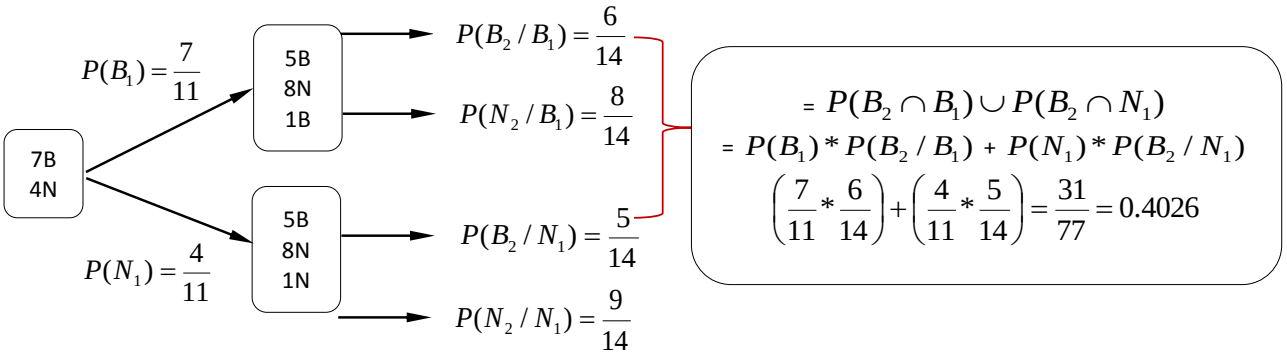
En una caja hay 5 esferas blancas, 4 rojas y 3 negras. Si se extraen al azar 3 esferas en forma consecutiva, sin reemplazo, ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean de color rojo? Sea R1 el evento extraer una esfera roja.

$$P(R1 \cap R2 \cap R3) = P(R1)\, P(R2/R1)\, P(R3/R1 \cap R2) = \frac{4}{12} * \frac{3}{11} * \frac{2}{10} = \frac{24}{1320} = \frac{1}{51}$$

Ejemplo:

Una bolsa contiene 7 bolas blancas y 4 negras, y una segunda bolsa contiene 5 bolas blancas y 8 negras. Se extrae una bola de la primera bolsa, sin verla, y se coloca en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda bolsa sea blanca?

1.



Eventos Independientes:

Se dice que dos o más eventos son independientes entre sí cuando la probabilidad de que ocurra uno no es influida por la ocurrencia de otro. Si A y B representan dos eventos y si la ocurrencia de A no afecta a la ocurrencia de B, y la ocurrencia de B no afecta a la ocurrencia de A, entonces se dice que A y B son Independientes.

En este caso, la probabilidad de que ocurran A y B es igual al producto de sus respectivas probabilidades, y se expresa así:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Ejemplo: En una caja hay 5 esferas blancas, 4 rojas y 3 negras. Se extrae una esfera, se observa su color y se regresa a la caja. Bajo estas condiciones, ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 3 esferas, éstas sean de color rojo?

$$P(R1 \cap R2 \cap R3) = \frac{4}{12} * \frac{4}{12} * \frac{4}{12} = \frac{64}{1728} = \frac{1}{27}$$

Se lanza ***dos veces*** un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener totales de 7 y 11?

Para que caigan totales de 7 y 11 en dos lanzamientos de un par de dados tiene que pasar los siguiente:		
Que caiga 7 en el primer lanzamiento	**Y**	Que caiga 11 en el segundo lanzamiento
O Que		
Que caiga 11 en el primer lanzamiento	**Y**	Que caiga 7 en el segundo lanzamiento

$$P\left\{7_{1\,Lanz} \cap 11_{2\,Lanz}\right\} \cup P\left\{11_{1\,Lanz} \cap 7_{2\,Lanz}\right\}$$

$$\left\{P(7)_{1\,Lanz} * P(11)_{2\,Lanz}\right\} + \left\{P(11)_{1\,Lanz} * P(7)_{2\,Lanz}\right\}$$

$$\left\{\frac{6}{36} * \frac{2}{36}\right\} + \left\{\frac{2}{36} * \frac{6}{36}\right\} = \frac{1}{54} = 0.01851$$

Una caja contiene 200 focos, 50 azules y 50 rojos; de los cuales, 10 son defectuosos: 6 azules y 4 rojos. ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar, sea defectuoso (evento D)?

$$P(D) = \frac{10}{200} = \frac{5}{100}$$

Si seleccionamos un foco al azar y se observa que éste es azul (evento A), ¿Cuál es la probabilidad de que el foco sea defectuoso, dado que es azul?

Escribiremos P(D/A), para representar la probabilidad del evento D, dado A. Entonces, puesto que hay 50 focos azules y de éstos, 6 son defectuosos

$$P(D / A) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

5. REGLA DE BAYES

El procedimiento que se utiliza para encontrar probabilidades posteriores, a partir de probabilidades previas, se llama regla Bayesiana. Las probabilidades a priori o previas se conocen antes de obtener información alguna del experimento en cuestión. Las probabilidades a posteriori se determinan después de conocer los resultados del experimento.

El teorema de Bayes consiste en un método para encontrar la probabilidad de una causa específica cuando se observa un efecto particular.

Esto es, si el evento B ha ocurrido, ¿Cuál es la probabilidad que fuera generado por el evento A1 (que es una causa posible) o por el A2 (otra causa posible)?

Si suponemos que los eventos A1, A2, A3,...., An, forman una partición de un espacio muestral S; esto es, que los eventos A1 son mutuamente excluyentes y su unión es S. Ahora, sea B otro evento

$$B = S \cap B = (A1 \cup A2 \cup A3... \cup An) \cap B$$

Donde $Ai \cap B$ son eventos mutuamente excluyentes. En consecuencia:

$$P(B) = P(A1 \cap B) + P(A2 \cap B) + P(A3 \cap B) + ... + P(An \cap B)$$

Luego por la regla de multiplicación:

$$P(B) = P(A1)\, P(B/A1) + P(A2)\, P(B/A2) + P(A3)\, P(B/A3) ... P(An)\, P(B/An)$$

Si A1, A2, A3, ..., An es una partición de S, y B es cualquier evento. Entonces para cualquier i,

$$P\left(A_i/B\right) = \frac{P(A_i)\, P\left(B/A_i\right)}{P(A_1)P\left(B/A_1\right) + P(A_2)P\left(B/A_2\right) + \cdots + P(A_n)P\left(B/An\right)}$$

Es decir:

$$P\left(A_i/B\right) = \frac{P(A_i)\, P\left(B/A_i\right)}{\sum P(A_i)\, P\left(B/A_i\right)}$$

La expresión anterior puede interpretarse de la manera siguiente: Si un evento puede ocurrir en más de una forma, entonces la probabilidad de que ocurra en una forma particular será igual a la razón de la probabilidad de que se presente la forma respecto a la probabilidad de que ocurra.

Se tienen dos cajas. La caja I contiene 3 esferas rojas y 2 azules, en tanto que la caja II contiene 2 esferas rojas y 8 azules. Se arroja una moneda. Si se obtiene águila se saca una esfera de la caja I; si se obtiene sol se saca una esfera de la caja II. R indica el evento “sacar una esfera roja” mientras

que I y II indican los eventos escoger caja I y caja II, respectivamente. Una esfera roja puede resultar al escoger cualquiera de las cajas.

a) Hallar la probabilidad de sacar una esfera roja.

$$P(R) = P(I)P(R / I) + P(II)P(R / II)$$

$$P(R) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{10}\right)=\frac{2}{5}$$

b) Hallar la probabilidad de que se escogiera la caja I, dado que la esfera es R, (es decir que el resultado de arrojar la moneda sea águila).

La persona que arrojó la moneda no da a conocer si resultó águila o sol (de tal manera que la caja de la cual se sacó la esfera se desconoce) pero indica que se extrajo una esfera roja.

Buscamos la probabilidad de que se escoja la caja I y se sabe que se sacó una esfera roja. Empleando el teorema de Bayes, esta probabilidad está dada por:

$$P\left(I/R\right)=\frac{P(I)P\left(R/I\right)}{P(I)P\left(R/I\right)+P(II)P\left(R/II\right)}$$

$$P\left(I/R\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{10}\right)}=\left(\frac{3}{4}\right)$$

En un Instituto Superior, el 25 por ciento de los hombres y el 10 por ciento de las mujeres estudian Biología. Las mujeres constituyen el 60 por ciento del estudiantado. Si se selecciona en forma aleatoria un estudiante y resulta que está cursando Biología, determinar la probabilidad de que sea mujer.

P(H) = 0.40; P(M) = 0.60; P(B/H) = 0.25; P(B/M) = 0.10

$$P\left(M/B\right)=\frac{(0.6)(0.1)}{(0.4)(0.25)+(0.6)(0.1)}=0.375$$