7. DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

La Distribución Binomial

Esta distribución fue elaborada por Jacobo Bernoulli y es aplicable a un gran número de problemas de carácter económico y en numerosas aplicaciones como:

- Juegos de azar.

- Control de calidad de un producto.

- En educación.

- En las finanzas.

La distribución binomial posee las siguientes propiedades esenciales:

1.- El espacio muestral contiene n ensayos idénticos.

2.- Las observaciones posibles se pueden obtener mediante dos diferentes métodos de muestreo.

Se puede considerar que cada observación se ha seleccionado de una población infinita sin reposición o de una población finita con reposición.

3.- Cada observación se puede clasificar en una de dos categorías conocidas como éxito E o fracaso E', las cuales son mutuamente excluyentes es decir $E \cap E' = 0$.

4.- Las probabilidades de éxito p y de fracaso $q = 1 - p$ en un ensayo se mantienen constantes, durante los n ensayos.

5.- El resultado de cualquier observación es independiente del resultado de cualquier otra observación.

La probabilidad de que el evento E ocurra x veces y el evento E' ocurra (n - x) veces en n ensayos independientes está dado por la fórmula binomial:

$$P(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Donde:

p = Probabilidad característica o probabilidad de éxito.

q = Probabilidad de fracaso

x = Número de éxitos deseados

n = Número de ensayos efectuados

Ejemplo 1:

Considere el conjunto de experimentos de Bernoulli en el que se seleccionan tres artículos a la azar de un proceso de ensamble, se inspeccionan y se clasifican como defectuosos o no defectuosos. Un artículo defectuoso se designa como un éxito.

El número de éxitos es una variable aleatoria que toma valores integrales de 0 a 3. Los ocho resultados posibles y los valores correspondientes de x son:

RESULTADO	X
NNN	0
NDN	1
NND	1
DNN	1
NDD	2
DND	2
DDN	2
DDD	3

Como los artículos se seleccionan de forma independiente de un proceso que supondremos produce 25% de artículos defectuosos,

P (NDN) = P (N) P (D) P (N) = (¾) (1/4) (3/4) = 9/64

Cálculos similares dan las probabilidades para los demás resultados posibles. La distribución de probabilidad de x es por tanto

x	0	1	2	3
F (x)	27/64	27/64	9/64	1/64

El número x de éxitos en n experimentos de Bernoulli se denomina variable aleatoria binomial. La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama distribución binomial, y sus valores se denotaran como b (x; n, p), pues dependen del numero de pruebas y de la probabilidad de éxito en una prueba dada. De esta forma para l distribución de la probabilidad de x, el número de defectuosos es,

P (x = 2) = f (2) = b (2; 3, ¼) = 9/64

Ejemplo 2:

La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque dada es ¾. Encuentre la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueben.

Solución:

Suponga que las pruebas son independientes y como p = ¾ para cada una de las 4 pruebas obtenemos:

$$b(2; 4, 3/4) = \binom{4}{2}(3/4)^2(1/4)^2 = 4!/2!2!.\ 3^2/4^4 = 27/128$$

La distribución binomial deriva su nombre del hecho de que los $n + 1$ terminados en la expansión binomial de $(q + p)^n$ corresponden a los diversos valores de $b(x; n, p)$ para $x = 0,1,2,3,\ldots n$, es decir, $(q + p)^n = \binom{n}{0} q^n + \binom{n}{1} p\, q^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} p^n = b(0; n, p) + b(1; n, p) + b(2; n, p) + \ldots + b(n; n, p)$.

Como $p + q = 1$ *vemos que* $\sum_{x=0}^{n} b(x; n, p) = 1.$

Condición que debe ser valida para cualquier distribución de probabilidad. Con frecuencia, nos interesamos en problemas donde se necesita encontrar $P(x < r)$ o $p(a \leq x \leq b)$. Por fortuna, dispone de las sumas binomiales.

La media y la varianza de la distribución binomial b (x; n, p) son:

$$\mu = np \qquad \sigma^2 = npq$$

Ejemplo 3:

Determine la media y la varianza de la variable aleatoria binomial del ejercicio anterior.

Solución:

$\mu = np \qquad \mu = 4*3/4 \qquad \mu = 3$

$\sigma^2 = npq \qquad \sigma^2 = 4*3/4*1/4 \qquad \sigma^2 = 3/4$

Distribución Multinomial:

El experimento binomial se convierte en un *experimento multinomial* si se considera que cada ensayo tiene más de dos posibles resultados. Por lo tanto la clasificación de un producto manufacturado como ligero, pesado o aceptable y el registro de accidentes en cierto cruce de calles según el día de la semana, son experimentos multinomiales.

Si un ensayo dado puede conducir a *K* resultados E_1, E_2,…, E_k, con probabilidades p_1, p_2, …, p_k entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatorias X_1, X_2, …, X_k, que representan el número de ocurrencias para E_1, E_2, …, E_k en n ensayos independientes es:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{k;} p_1, p_2, \ldots, p_k\,, n) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

$$\text{Donde: } \sum_{i=1}^{k} x_i = n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

La distribución multinomial toma su nombre del hecho de que los términos del desarrollo multinomial de $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$ corresponden a todos los posibles valores de $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k;} p_1, p_2, \ldots, p_k; n)$

Ejemplo:

Si un par de dados se tira 6 veces, ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 7 u 11 dos veces; un par una vez y cualquiera otra combinación 3 veces?

Solución:

E_1 = Ocurre un total de 7 u 11

E_2 = Ocurre un par, entendiendo como 11, 22, 33, 44, 55, 66 = 6/36

E_3 = No ocurre un par ni un total de 7 u 11

Las probabilidades correspondientes para un ensayo dado son: p_1= 2/9, p_2 = 1/6, p_3 = 11/18. Estos valores permanecen constantes para los 6 ensayos. Utilizando la distribución multinomial con $x_1 = 2$ $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$ se obtiene que la probabilidad buscada:

$$f(1,2,3;\ 2/9,\ 1/6,\ 11/18,\ 6) = \binom{6}{2,1,3}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{11}{3}\right)^3 = \frac{6}{2! * 1! * 3!} * \frac{2^2}{9^2} * \frac{1}{6} * \frac{11^3}{18^3} = 0.1127$$

Distribución de Poisson y Proceso Poisson

Los experimentos que dan valores numéricos de una variable aleatoria x, el numero de resultados que ocurre entre un intervalo dado o en una región especifica, se llaman experimentos de Poisson. El intervalo dado puede ser de cualquier longitud, como un minuto, un día, una semana, un mes o incluso un año. Por ello un experimento de Poisson puede generar observaciones para la variable aleatoria x que representa el número de llamadas telefónicas por hora que recibe una oficina, el numero de días que la escuela permanece cerrada debido a la nieve durante el invierno o el numero de juegos suspendidos debido a la lluvia durante la temporada de béisbol. La región específica podría ser un segmento de línea, un área o quizá una pieza de material. En tales casos x puede representar el número de ratas de campo por acre, el número de bacterias en un cultivo dado o el número de errores mecanográficos por página.

Propiedades del Proceso Poisson

1. El numero de resultados que ocurren en un intervalo o región especifica es independiente del numero que ocurre en cualquier otro intervalo o región del espacio disconjunto. De esta forma vemos que el proceso de Poisson no tiene memoria

2. La probabilidad que ocurra un solo resultado durante un intervalo muy corto o en una región pequeña es proporcional a la longitud del intervalo o al tamaño de la región y no depende del número de resultados que ocurren fuera de este intervalo o región.

3. La probabilidad que ocurra más de un resultado en tal intervalo corto o que caiga en tal región pequeña es insignificante.

El siguiente concepto se utiliza para calcular probabilidades de Poisson:

La distribución de la probabilidad de la variable aleatoria de Poisson x, que representa el número de resultados que ocurren en un intervalo dado o región específica que se denota con t, es:

$$p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

Donde μ es el número promedio de resultados que ocurren en un intervalo dado o en una región especificada; $e = 2.71828$ y x es la variable aleatoria de Poisson ($x = 1,2,3,\ldots,$)

La suma de la probabilidad de Poisson es:

$$P\,(r;\,\mu) = \sum_{X=0}^{R} p(x;\mu)$$

Ejercicios del Proceso Poisson:

1. Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿ Cual es la probabilidad de que 6 partículas entren al contador en un milisegundo dado?.

Solución:

Al usar la distribución de Poisson con x = 6 μ= 4, encontramos:

P (6; 4) = $\frac{e^{-4}4^{6}}{6!}$ = 0.1042 ó según tabla A_2 = $\sum_{x=0}^{6} p(x;4) - \sum_{x=0}^{5} p(x;4)$ = 0.8893- 0.7851 = 0.1042

2. El número promedio de camiones tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden manejar a lo más 15 camiones tanque por día. ¿Cual es la probabilidad en que un día dado los camiones se tengan que regresar?

Solución:

Sea x el número de camiones tanque que llegan cada día. Entonces:

$$P\ (x > 15) = 1 - p\ (x \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p(x;10) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

TEOREMA:

La media y la varianza de la distribución de Poisson p (x; λ t) tiene el mismo valor a λ t y para verificar que la media es en realidad λ t, sea μ = λ t podemos deducir:

E (X) = ∑ x e^ -μ μ^x/x! = ∑ x e^-μ μ^x/x ! = μ ∑ e^ -μ μ^x – 1/ (x – 1)!Ahora bien, sea y = x – 1 lo que da:

E (X) = μ ∑ e^ -μ μ^y/ y! = μ,

Puesto que:

∑ e^ -μ μ^y/ y! = ∑ p (y; μ) = 1.

La varianza de la distribución de Poisson se obtiene al encontrar primero:

E [X (X – 1)] = ∑ x (x – 1) e^ -μ μ^x/x! = ∑ x (x – 1) e^ -μ μ^x/x!